Нестандардни проблеми са Фибоначијевим бројевима

У наредним проблемима користићемо низ Фибоначијевих бројева, дефинисан рекурентно на следећи начин:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ за } n \geqslant 2.$$

Његови почетни чланови су: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144\ldots$ Познато је да се може дати и експлицитна формула за Фибоначијеве бројеве:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}},$$

за $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (тзв. *златни пресек*; приближна вредност је $1.61803\ldots$) и $\psi = 1 - \varphi = -\frac{1}{\varphi}$ (приближно $-0.61803\ldots$).

Биће нам потребно и следеће тврђење о Фибоначијевим бројевима (познато из комбинаторике, а може се и лако показати индукцијом за вежбу).

Тврђење. *За произвољан природан број l важе следеће једнакости:*

a) $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2l+1} = F_{2l+2}$;

b) $F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2l} = F_{2l+1} - 1$.

Задатак 1. *За задат природан број k, нека је n_k најмањи природан број такав да постоји коначан скуп A целих бројева са следећим особинама:*

- *за свако $a \in A$ постоје $x, y \in A$ (не обавезно различити) такви да $n_k \mid a - x - y$;*
- *не постоји подскуп B скупа A, $1 \leqslant |B| \leqslant k$, такав да $n_k \mid \sum_{b \in B} b$.*

Доказати да за све $k \geqslant 3$ важи $n_k < \left(\frac{13}{8}\right)^{k+2}$.

Пример. Узмимо $k = 3$. Показаћемо да за $n_k = 8$ можемо конструисати тражени скуп A (како је у поставци n_k дефинисано као *најмања* вредност која испуњава задате услове, ако покажемо да вредност $n_k = 8$ испуњава те услове, тада ће најмања таква вредност бити 8 или још мање). Узећемо $A = \{1, 4, 5, 6\}$. Тада имамо:

$$8 \mid 1 - 4 - 5; \qquad 8 \mid 4 - 6 - 6; \qquad 8 \mid 5 - 1 - 4; \qquad 8 \mid 6 - 1 - 5,$$

па скуп A испуњава први услов. Његови непразни подскупови са не више од три елемента су:

$$\{1\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{4,5\},$$
$$\{4,6\}, \{5,6\}, \{1,4,5\}, \{1,4,6\}, \{1,5,6\}, \{4,5,6\},$$

и збир елемената ниједног од њих није дељив са 8, па скуп A испуњава и други услов.

Решење. За задат број k, доказаћемо да за $n_k = F_{k+2} + 3$ можемо конструисати тражени скуп A.

Претпоставимо да је k паран број. Посматрајмо скуп

$$A = \{(-1)^i F_i : 2 \leqslant i \leqslant k\} \cup \{F_k + 1, F_k + 2\}.$$

(За непарно k доказ тече потпуно аналогно, уз једину разлику што два последњенаведена броја узимамо с предзнаком „$-$“.) На пример, за $k = 6$, имаћемо $n_k = F_8 + 3 = 21 + 3 = 24$ и $A = \{1, -2, 3, -5, 8, 9, 10\}$.

Проверимо да ли скуп A испуњава постављене услове. Испуњеност првог услова следи из релација:

- $(-1)^i F_i = (-1)^{i+1} F_{i+1} + (-1)^{i+2} F_{i+2}$ за све i, $2 \leqslant i \leqslant k-2$ (тј. $n_k \mid 0 = (-1)^i F_i - (-1)^{i+1} F_{i+1} - (-1)^{i+2} F_{i+2}$; ово „покрива“ све бројеве $a \in A$ облика $a = (-1)^i F_i$ за $2 \leqslant i \leqslant k-2$);
- $F_k + 2 = (F_k + 1) + F_2$ (дакле, за $a = F_k + 2$ имамо $n_k \mid a - (F_k + 1) - F_2$);
- $F_k + 1 = F_k + F_2$ (за $a = F_k + 1$, слично као претходно);
- $F_k = (F_k + 2) + (-F_3)$ (за $a = F_k$, слично као претходно);
- $n_k = F_{k+2} + 3 \mid (-F_{k-1}) - (F_k + 1) - (F_k + 2) = -F_{k+1} - F_k - 3 = -F_{k+2} - 3$ (за $a = -F_{k-1}$).

Потребно је још показати да скуп A не садржи непразан подскуп B који има не више од k елемената, и чији је збир елемената дељив са n_k. Претпоставимо супротно: нека је B такав подскуп скупа A. Како имамо $|A| = k + 1$, услов $|B| \leqslant k$ се своди на $B \subsetneq A$. Приметимо прво:

$$\begin{aligned}
\sum A &= (F_2 - F_3 + F_4 - \cdots + F_k) + (F_k + 1) + (F_k + 2) \\
&= (F_2 + F_4 + \cdots + F_k) - (F_3 + F_5 + \cdots + F_{k-1}) + (F_k + 1) + (F_k + 2) \\
&= (F_{k+1} - 1) - (F_k - 1) + (F_k + 1) + (F_k + 2) = F_{k+1} + F_k + 3 \\
&= F_{k+2} + 3 \equiv 0 \pmod{n_k}.
\end{aligned}$$

Дакле, ако скуп B испуњава наведени услов, онда то испуњава и скуп $A \setminus B$ (и притом важи $A \setminus B \neq \varnothing$ због $B \subsetneq A$). Приметимо, неки од скупова B и $A \setminus B$ садржи највише један од бројева $F_k, F_k + 1, F_k + 2$ (немогуће је да оба та скупа садрже бар по два од ових бројева, јер би онда тих бројева морало бити укупно бар четири). Можемо претпоставити, без умањења општости, да управо скуп B садржи највише један од ових бројева (ако то није испуњено, онда уместо B узмемо скуп $A \setminus B$ и даље радимо с њим). Покушајмо да одредимо највећу могућу вредност израза $\sum B$. Ова вредност ће бити највећа ако у скупу B немамо ниједан негативан број а имамо све позитивне, уз то ограничење да од (позитивних) бројева $F_k, F_k + 1, F_k + 2$ можемо узети само један (и то ћемо узети баш $F_k + 2$, ако тражимо горње ограничење за $\sum B$). Дакле:

$$\sum B \leqslant (F_k + 2) + (F_2 + F_4 + \cdots + F_{k-2}) = F_k + 2 + (F_{k-1} - 1) = F_{k+1} + 1.$$

Слично, уколико желимо да ограничимо вредност $\sum B$ одоздо, примећујемо да се минимум достиже ако се у скупу B налазе сви негативни бројеви и ниједан позитиван, тј. имамо:

$$\sum B \geqslant -(F_3 + F_5 + \cdots + F_{k-1}) = -(F_k - 1).$$

Дакле, сада из неједнакости

$$-n_k < -(F_k - 1) \leqslant \sum B \leqslant F_{k+1} + 1 < n_k$$

и услова $n_k \mid \sum B$ следи да је једина могућност $\sum B = 0$.

Означимо $C_t = \{(-1)^i F_i : 2 \leqslant i \leqslant t\}$. Показаћемо индукцијом по t да скуп C_t, за $t \geqslant 3$, не садржи непразан подскуп чија је сума елемената једнака нули. За базу узимамо случај $t = 3$: тада имамо $C_3 = \{1, -2\}$, и у овом случају тврђење очигледно важи. Претпоставимо сада да тврђење важи за $t-1$, и докажимо га за t. Нека је D непразан подскуп скупа C_t за који важи $\sum D = 0$. Како имамо $C_t = C_{t-1} \cup \{(-1)^t F_t\}$, а по индуктивној хипотези је немогуће $D \subseteq C_{t-1}$, мора важити $(-1)^t F_t \in D$. Међутим, тада за парно t имамо

$$\sum D \geqslant F_t - F_3 - F_5 - \cdots F_{t-1} = F_t - (F_3 + F_5 + \cdots + F_{t-1}) = F_t - (F_t - 1) = 1,$$

а за непарно t имамо

$$\sum D \leqslant -F_t + F_2 + F_4 + \cdots + F_{t-1} = -F_t + (F_t - 1) = -1;$$

у оба случаја добијамо контрадикцију са $\sum D = 0$. Дакле, тиме смо доказали да скуп C_t не садржи непразан подскуп чија је сума елемената једнака нули.

Вратимо се на решавање постављеног задатка. Добили смо да мора важити $\sum B = 0$, а како имамо $A = C_k \cup \{F_k + 1, F_k + 2\}$, следи да B садржи бар један од бројева $F_k + 1$ и $F_k + 2$ (наиме, по претходном пасусу је немогуће $B \subseteq C_k$). Но, одатле следи

$$\sum B \geqslant (F_k + 1) - (F_3 + F_5 + \cdots + F_{k-1}) = F_k + 1 - (F_k - 1) = 2,$$

контрадикција са $\sum B = 0$. Тиме је коначно показано да не постоји такав скуп B, тј. да скуп A испуњава и други тражени услов.

Преостаје још доказати неједнакост $n_k < \left(\frac{13}{8}\right)^{k+2}$ (за $n_k = F_{k+2} + 3$). Приметимо неједнакост $\varphi < \frac{13}{8}$ (што се директно проверава). Дакле, имамо:

$$\begin{aligned} n_k = F_{k+2} + 3 &= \frac{\varphi^{k+2} - \psi^{k+2}}{\sqrt{5}} + 3 = \varphi^{k+2} \cdot \frac{1 + \frac{3\sqrt{5} - \psi^{k+2}}{\varphi^{k+2}}}{\sqrt{5}} < \varphi^{k+2} \cdot \frac{1 + \frac{8}{\varphi^{k+2}}}{\sqrt{5}} \\ &< \varphi^{k+2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} < \varphi^{k+2} < \left(\frac{13}{8}\right)^{k+2}, \end{aligned}$$

(директно се проверавају све успут коришћене неједнакости, наиме: $3\sqrt{5} < 7$, $|\psi^{k+2}| < 1$ и $\varphi^{k+2} \geqslant \varphi^5 > 8$), чиме је задатак решен. □

Задатак 2. *Доказати да за сваки природан број* K *постоји база* b *и* K *уређених тројки Фибоначијевих бројева* (F_u, F_v, F_w) *таквих да, када се запишу у бази* b, *њихова конкатенација* $\overline{F_u F_v F_w}$ *такође представља неки Фибоначијев број записан у бази* b.

Решење. С циљем да најпре потражимо неке што једноставније примере, поставимо $F_u = F_w = 1$ (што јесу Фибоначијеви бројеви). Дакле, занима нас за које је базе b број $b^2 + bF_v + 1$ Фибоначијев (где бирамо још и F_v, и притом ћемо га тражити таквог да важи $F_v < b$, тј. да буде једноцифрен у бази b). Овакве примере тражимо на следећи начин: најпре фиксирамо да вредност посматраног израза буде једнака неком Фибоначијевом броју, а затим за F_v испробавамо мање Фибоначијеве бројеве и проверавамо када постоји природан број b који је решење тако добијене квадратне једначине. Налазимо следеће примере за (b, F_v): $(4, F_1) = (4, 1)$ (тада је вредност израза једнака $F_8 = 21$), $(11, F_3) = (11, 2)$ (тада је вредност израза једнака $F_{12} = 144$), $(29, F_5) = (29, 5)$ (тада је вредност израза једнака $F_{16} = 987$). Број могућности које проверавамо можемо знатно сузити уколико искористимо чињеницу да F_v морамо бирати такво да $2F_v^2$ буде мање од вредности коју смо фиксирали за посматрани израз (с обзиром на $b^2 + bF_v + 1 > 2F_v^2$, због $b > F_v$); примера ради, у овом последњем случају, када је за вредност посматраног израза узето $F_{16} = 987$, за F_v довољно је тестирати Фибоначијеве бројеве мање од $\sqrt{\frac{987}{2}}$, тј. мање од 22.

Досад пронађени примери сугеришу да се за v појављују све непарне вредности, и да тада постоји одговарајућа база b таква да важи

$$b^2 + bF_v + 1 = F_{2v+6}. \tag{1}$$

Сада ћемо размотрити вредности које се појављују за b, али пре тога уведимо појам тзв. *Ликаових бројева* (које је први изучавао француски математичар Édouard Lucas, по коме су добили име). Они задовољавају исту рекурентну везу као Фибоначијеви бројеви: $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, али почетне вредности су другачије: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$. Првих неколико вредности су: $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123\ldots$ И за Ликаове бројеве постоји и експлицитна формула (чак једноставнија него за Фибоначијеве бројеве): $L_n = \varphi^n + \psi^n$.

Сада наслућујемо да вредности за b представљају непарно индексиране Ликаове бројеве $(L_3, L_5, L_7\ldots)$. Додајмо ипак, анализа се може спровести и без икаквог знања о Ликаовим бројевима: у том случају се може приметити да низ вредности које се јављају за b задовољава рекурентну везу $b_i = 3b_{i-1} - b_{i-2}$ (по потреби је могуће израчунати још неколико наредних могућих вредности за b пре погађања ове рекурентне везе, будући да рачунање наредних могућих вредности за b постаје врло једноставно након хипотезе (1); наредна могућа вредност је 76, након тога 199 итд.). У наставку решења радимо преко Ликаових бројева, а врло слично иде и без њих, само треба додатно решавати рекурентну везу за b_i уместо да користимо већ готову формулу за Ликаове бројеве.

Фиксирајмо сада једну од могућих вредности за b, рецимо $b = 76 = L_9$, и покушајмо да нађемо још неке примере тројки (F_u, F_v, F_w) које задовољавају услов из поставке за $b = 76$. Није тешко пронаћи следеће тројке:

$$\begin{aligned}(F_u, F_v, F_w) &\in \{(1,13,1),(3,5,3),(8,2,8),(21,1,21)\}\\ &= \{(F_2,F_7,F_2),(F_4,F_5,F_4),(F_6,F_3,F_6),(F_8,F_1,F_8)\}\end{aligned}$$

(такође налазимо и тројке $(34, 0, 34)$ и $(55, 1, 55)$, али за њих ће се испоставити да су ван обрасца који уобличујемо). Дакле, сада коначно можемо формулисати и затим доказати тврђење које решава задатак: *за ма који непаран број n и ма који паран број k, $2 \leqslant k \leqslant n-1$, конкатенација Фибоначијевих бројева $\overline{F_kF_{n-k}F_k}$ записаних у бази L_n такође представља неки Фибоначијев број записан у бази L_n.*

Покажимо ово. Како важи $F_k, F_{n-k} < L_n$, следи да су бројеви F_k и F_{n-k} једноцифрени у бази L_n. Одатле имамо:

$$\begin{aligned}
&\overline{F_kF_{n-k}F_k}\\
&= L_n^2F_k + L_nF_{n-k} + F_k = (\varphi^n+\psi^n)^2\cdot\frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt5} + (\varphi^n+\psi^n)\cdot\frac{\varphi^{n-k}-\psi^{n-k}}{\sqrt5} + \frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt5}\\
&= (\varphi^n+\psi^n)\left((\varphi^n+\psi^n)\cdot\frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt5} + \frac{\varphi^{n-k}-\psi^{n-k}}{\sqrt5}\right) + \frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt5}\\
&= (\varphi^n+\psi^n)\left(\frac{\varphi^{n+k}-\varphi^{n-k}(\varphi\psi)^k+\psi^{n-k}(\psi\varphi)^k-\psi^{n+k}}{\sqrt5} + \frac{\varphi^{n-k}-\psi^{n-k}}{\sqrt5}\right) + \frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt5}\\
&= (\varphi^n+\psi^n)\left(\frac{\varphi^{n+k}-\varphi^{n-k}+\psi^{n-k}-\psi^{n+k}}{\sqrt5} + \frac{\varphi^{n-k}-\psi^{n-k}}{\sqrt5}\right) + \frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt5}\\
&= (\varphi^n+\psi^n)\cdot\frac{\varphi^{n+k}-\psi^{n+k}}{\sqrt5} + \frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt5}\\
&= \frac{\varphi^{2n+k}-(\varphi\psi)^n\psi^k+(\psi\varphi)^n\varphi^k-\psi^{2n+k}}{\sqrt5} + \frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt5}\\
&= \frac{\varphi^{2n+k}+\psi^k-\varphi^k-\psi^{2n+k}}{\sqrt5} + \frac{\varphi^k-\psi^k}{\sqrt5} = \frac{\varphi^{2n+k}-\psi^{2n+k}}{\sqrt5} = F_{2n+k}
\end{aligned}$$

(успут смо користили $(\varphi\psi)^k = (-1)^k = 1$ јер је k парно, и $(\varphi\psi)^n = (-1)^n = -1$ јер је n непарно). Тиме је доказ завршен. □